

基于数学规划条件的粘连颗粒图像鞍点搜寻

汪一聪 陈 曩 赵 攀

(宁波大学信息科学与工程学院, 宁波 315211)

摘 要 鞍点在图像粘连对象分割的过程中起着非常关键的作用, 目前已有若干以分割为目的的鞍点搜索算法, 但在其简捷性、鲁棒性等方面仍有改善的余地。提出一种基于数学规划条件的颗粒图像鞍点搜寻新方法。该方法首先根据颗粒图像 3 维地貌化后得到的像素空间分布信息, 利用数学规划原理提出颗粒图像的鞍点规划条件, 然后根据其条件进行鞍点检测。将提出的算法应用在真实粘连颗粒图像上, 实验结果表明, 该算法具有较高的准判率, 为颗粒图像的分割以及相关后续处理奠定了理论分析基础。

关键词 数学规划 鞍点规划 颗粒图像 鞍点

中图法分类号: TP391 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)03-385-07

Programming Restraint Based Saddle-point Identification for Granule Images

WANG Yicong CHEN Ken ZHAO Pan

(College of Information Science and Engineering, Ningbo University, Ningbo 315211)

Abstract Saddle point has been used for segmenting the connected granules in the image. To date there have been several reports on separating algorithms but there are still space for the improvement of the robustness and simplicity. Based on mathematical programming conditions, the author proposes a new approach to search for the saddle point. First the original image is transformed to 3-D topographic counterpart, then combined with pixel information and saddle point restraints set by the programming premises, the desired saddle point can thus identified. The algorithm is put to test on given images, and the results show certain adequacies in robustness, simplicity, and correction rate.

Keywords mathematical programming saddle point programming granule image saddle-point

0 引 言

计算机图像处理在生物和医学领域以及工业检测中得到越来越多的应用。与这些领域相关的图像中经常会涉及到对颗粒对象进行识别和分析, 通常包括需要计算每个颗粒的几何参数以及统计颗粒的总数目, 在此基础上再进行诸如颗粒特征提取等其他后续分析^[1-3]。对于相互粘连的颗粒, 对其进行分割处理是一道必要的前期处理手段, 而采用鞍点定位法

来完成这一分割过程的方法已有过文献报道^[4-5]。

在处理真实颗粒图像的过程中, 由于光照条件或者颗粒本身分布的原因, 经常会出现颗粒相互重叠或者粘连的现象。分析可知, 图像中相互接触的颗粒在经过连续腐蚀后存在着一个类似马鞍面的连接带, 而这个连接带的几何中心点就是两个颗粒相互接触的连接点, 定义为鞍点。能否准确有效地找到这一点, 关系到后续的分割是否正确。目前对于确定鞍点的位置, 有若干种算法已见报道, 其中与分割直接相关的算法包括模板法^[4]和基于 Hessian 矩

收稿日期: 2008-07-23 改回日期: 2008-12-23

第一作者简介: 汪一聪 (1984 —), 女。宁波大学电路与系统专业硕士研究生。主要研究方向为信号处理与图像处理。E-mail: cong7307@163.com

阵法^[5]。第 1 种方法计算量非常大而且对颗粒摆放的位置都非常敏感, 很容易造成鞍点的误判和漏判。利用 Hessian 矩阵的算法, 虽然时间大大缩短, 但对图像大小和像素密度的关系较为复杂, 因此, 实际操作效果也受到了一定的影响。

本文提出一种确定鞍点位置的新方法, 通过对原颗粒图像进行 3 维地貌化的像素信息结合数学中的鞍点规划, 建立颗粒图像的鞍点规划模型, 最终确定鞍点的位置。实验结果表明, 该方法能够较准确地找到鞍点的位置, 并有令人满意的判断准确率。

1 基本原理

1.1 数学规划

数学规划是最优化理论的一个分支, 已成为有效而实用的数学工具, 不仅在工程、经济、军事、管理等诸多部门发挥着重要作用, 而且在物理、化学等基础学科中, 也显示出了其实用性^[6]。

数学规划原理:

设 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 n 维欧氏空间 \mathbf{R}^n 中的一点; $f(\mathbf{X}), g_i(\mathbf{X}), (i = 1, 2, 3, \dots, m), h_i(\mathbf{X}) (i = m + 1, m + 2, \dots, p)$, 为已知 n 元函数。数学规划是指在约束条件:

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{X}) &\leq 0 & i = 1, 2, \dots, m \\ h_i(\mathbf{X}) &= 0 & i = m + 1, m + 2, \dots, p \end{aligned} \quad (1)$$

之下, 求函数 $f(\mathbf{X})$ 的最小值, 用简式表示

$$\begin{aligned} \min & f(\mathbf{X}) \\ \text{s. t.} & g_i(\mathbf{X}) \leq 0 & i = 0, 1, \dots, m \\ & h_i(\mathbf{X}) = 0 & i = m + 1, m + 2, \dots, p \end{aligned} \quad (2)$$

式中, 函数 $f(\mathbf{X})$ 为目标函数, $g_i(\mathbf{X})$ 为不等式约束函数, $h_i(\mathbf{X})$ 为等式约束函数。

1.2 鞍点规划

数学规划是一种广义下的极值问题, 工程上所追求的最低性能、最低成本等, 都是基于这一理论之上的, 而鞍点规划亦属于数学规划的一种^[7]。

鞍点规划是以寻求函数鞍点为目标的一种数学规划。鞍点规划问题的目的在于解决鞍点的确定问题, 有时也直接称为“极大值的极小化”(min max), 或“极小值的极大化”(max min) 问题。函数在鞍点处具有“极大的极小”或“极小的极大”性质, 可以方便地用来解决形位误差评定等一类工程问题, 由此建立针对评定问题统一数学模型, 既便于理论研

究, 又便于评定求解, 做到两者良好的统一^[8]。同时, 鞍点也可常用来判断物理、化学的各种反应的状态上^[9-11], 但应用于图像处理方面却是少之又少^[12]。

设 F 是两个向量 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 的实函数, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T, \mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, \mathbf{X} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n$, 如果存在一点 $(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*), \mathbf{X}^* \in \mathbf{R}^m, \mathbf{Y}^* \in \mathbf{R}^n$, 对于每个 \mathbf{X}, \mathbf{Y} 都有

$$F(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*) = \min_{\mathbf{Y}} \max_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (3)$$

则称点 $(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$ 为 F 的鞍点 (saddle-point)。

上式还可以表示为

$$F(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}) \leq F(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*) \leq F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}^*) \quad (4)$$

典型的一类鞍点规划可用下式表示

$$\min_{\mathbf{X}} \max_{\mathbf{Y}} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (5)$$

$f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}): \mathbf{R}^{m+n} \rightarrow \mathbf{R}^1 \quad \mathbf{X} \in \mathbf{R}^m \quad \mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n$

$f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 是目标函数, (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) 为变元, \mathbf{X} 是 n 维向量, \mathbf{Y} 是 m 维变量。

局部鞍点约束条件为

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= 0 \\ \nabla_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\quad \text{半正定} \\ \nabla_{\mathbf{Y}} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\quad \text{半负定} \end{aligned} \quad (6)$$

式中, ∇ 代表目标函数在某一方向上的微分。

2 搜索鞍点算法

2.1 鞍点

鞍点是处于“马鞍中央的点”, 从纵向看取极大值, 从横向看取极小值, 如图 1 所示。形象地说, 如果两座山峰中间有一个连接带, 那么鞍点就是连接带的最低点, 而对于两座山峰点的山谷来说, 鞍点则是山谷的最高点。因而颗粒图像的鞍点规划就是以寻求颗粒图像 3 维地貌化的鞍点为目标的一种数学规划, 用以解决“极大值的极小化”或“极小值的极大化”问题。

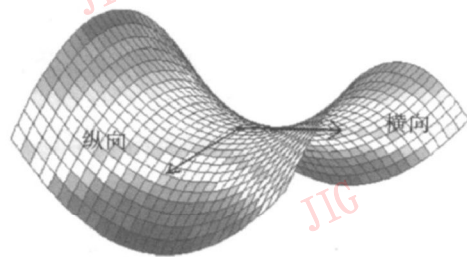


图 1 形象化的鞍点图

Fig. 1 Illustration of Saddle-point

2.2 图像的 3 维地貌构造

3 维信息是 2 维平面向 3 维立体方向的扩展, 等高线是表述 3 维地貌构造的方法。在一张地貌图上可以看到, 一条等高线上具有相同的高度值, 一般是一条封闭的曲线。利用它可以进行坡度分析、构造正射影像、生成剖面图和 3 维透视图。等高线也常常被称为“等值线”。

本文采用数学形态学中的终极腐蚀来实现对颗粒图像进行 3 维地貌的构造。由于 3×3 结构元素是大小为 $m \times m$ 结构元素中最小也是最基本的一种, 因此, 本文选用 3×3 结构元素进行腐蚀实验。通过每一次的腐蚀都将在颗粒图像的边缘形成一个封闭的带状环, 不断被剥掉的环带对应于图像中的距离带。不同的值赋给这些连续环, 环的直径随着腐蚀次数的增加而减少, 环的亮度随着向“山顶”靠近而增大。图 2(a) 是一幅两个颗粒相互接触的图片, 图 2(b) 其终极腐蚀的图像, 如图所示, 在环状边缘的亮度较暗, 越到内层亮度就越高, 一直到最后一次腐蚀, 亮度达到最大。

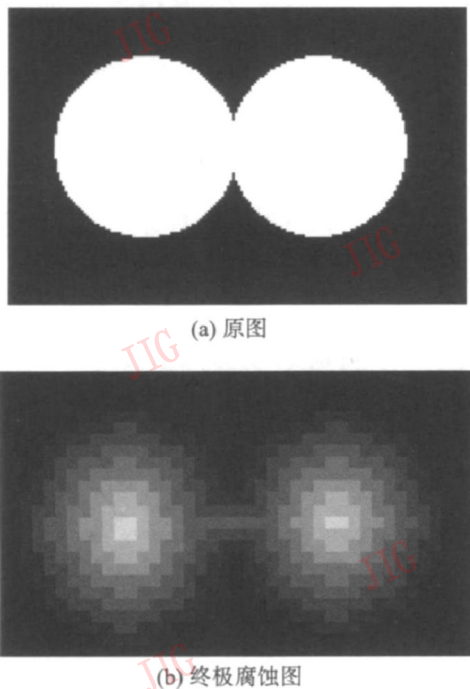


图 2 终极腐蚀图
Fig. 2 The image at ultimate erosion

用等值线对终极腐蚀后的图片进行描述, 每一条等值线代表着一次腐蚀剥离下的环带, 随着数值不断增大, 等值线的直径也逐渐变小。图 3 是对图 2 标定等值线后的 3 维图, 随着等值线数值不断上升, 从同一平面生长出两座相连的小山, 连接部分之

间存在一点, 过了该点两座小山就朝两个方向分开, 即两座山的分界点, 该点就为鞍点。

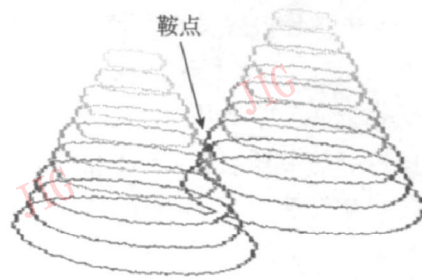


图 3 终极腐蚀等值线图
Fig. 3 The isoline of ultimate erosion

2.3 基于鞍点规划的鞍点确定

求取图像 3 维地貌上的鞍点实际上就是求取一个方向的最大值和与它正交方向的最小值的过程。而从图 2(b) 可以看出, 鞍点位于两个相互连接处上, 因此在一个小的范围中, 鞍点 $P(i^*, j^*)$ 附近是一个平坦区域, 根据上述数学规划中的局部鞍点规划条件, 可以得出 3 维地貌化图像的局部鞍点规划的条件, 当满足下列条件之一时即可判断为是鞍点:

$$\begin{aligned}
 & P(i^*, j^*) = \max_i \min_j P(i, j) \\
 & \min_i \max_j P(i, j) \quad \min_i \max_j P(i, j) \\
 & \text{s. t. } \nabla_{i^2} P(i, j) \geq 0 \quad \text{或者} \quad \text{s. t. } \nabla_{i^2} P(i, j) > 0 \\
 & \quad \nabla_{i^2} P(i, j) = 0 \quad \quad \quad \nabla_{i^2} P(i, j) = 0 \\
 & \quad \nabla_{j^2} P(i, j) < 0 \quad \quad \quad \nabla_{j^2} P(i, j) \leq 0 \\
 & \text{或者} \\
 & \max_i \min_j P(i, j) \quad \max_i \min_j P(i, j) \\
 & \text{s. t. } \nabla_{i^2} P(i, j) \leq 0 \quad \text{或者} \quad \text{s. t. } \nabla_{i^2} P(i, j) < 0 \\
 & \quad \nabla_{i^2} P(i, j) = 0 \quad \quad \quad \nabla_{i^2} P(i, j) = 0 \\
 & \quad \nabla_{j^2} P(i, j) > 0 \quad \quad \quad \nabla_{j^2} P(i, j) \geq 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

P 代表颗粒图像 3 维地貌化后的像素信息, i, j 代表竖直和水平两个方向。

计算 ∇ 的方法很多, 主要分为前项差分、后项差分、中心差分 3 种。从图 2(a) 中可以看出, 终极腐蚀后的图像, 环状带是每腐蚀一次剥离一层, 因此在最终的腐蚀图像上, 这些环状带在某种意义上来说是对称的。把每次剥离下的环状带赋一个值, 就会形成一条闭合的等值线, 相邻等值线之间的差值都相同。这一特点为在地貌图上选择中心差分来科学计算 ∇ 提供了条件。因此, 就得到了以下的求解式子:

$$\nabla_{i^2} f = P(i-2n, j) + P(i+2n, j) - 2P(i, j) \tag{8}$$

$$\nabla_i f = P(i-n, j-n) + P(i+n, j+n) - P(i+n, j-n) - P(i-n, j+n) \quad (9)$$

$$\nabla_j f = P(i, j+2n) + P(i, j-2n) - 2P(i, j) \quad (10)$$

n 代表步长, f 是求解鞍点的目标函数(在此可看作整个 3 维地貌), ∇ 为目标函数在某个方向的差分。

从图 2(b)鞍点处看出, 鞍点处在两个局部最高点中间连接地带的最低点, 因此在此方向上 $\nabla_j f$ 应大于零。但鞍点是处于一个平稳的连接带上, 这个带的长度将会影响到 $\nabla_j f$ 的判断。若 n 的取值过小或者连接带过长, 可能在判断 $\nabla_j f$ 时取值没有取到升高的位置而是落在连接带上, 则 $\nabla_j f$ 等于零, 如图 4 所示(横坐标表示鞍点在某一方向上的像素点, 纵坐标为相对应的像素值), 连接带占了 7 个像素, 如果 n 取 1 时, 那么判断 $\nabla_j f$ 时取值在连接带上。由于连接带的长度无法改变, 因此判断 $\nabla_j f$ 将取决于步长 n 的取值。

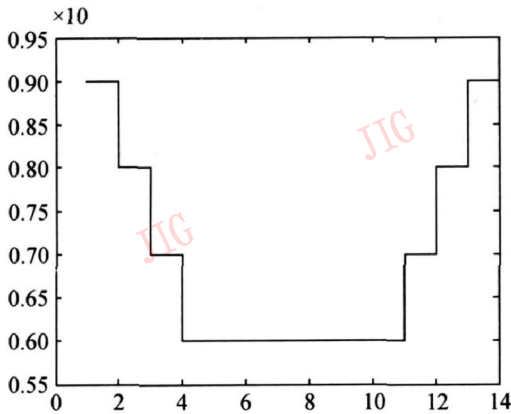


图 4 鞍点所处的连接带过长

Fig. 4 Prolonged strip on which a saddle point may locate

从另一个垂直方向上看, 鞍点所处的地形一定比其他环带的要高, 即鞍点处竖直方向等值线的值都要比它邻接的大, 因此, 就可得出 $\nabla_i f$ 是小于零的。前面提到, 3 维地貌化某种意义上是对称, 把鞍点的垂直截面内像素分布情形用阶梯图绘制出来, 可以看到鞍点处于最高位, 邻近的等值线以鞍点为准依次等值的下降, 如图 5 所示(横坐标表示鞍点在垂直方向上的像素点, 纵坐标表示相对应的像素值), 它是按对称等阶梯状逐渐下降的, 所以 $\nabla_i f$ 为零。

本文采用的是 3×3 的结构元素进行腐蚀, 设由该结构元素终极腐蚀得到的 3 维地貌图环状带的宽度为 r (r 代表着一个正方形像素点的边长), 则包含鞍点的连接带的宽度为 $1r$ (如图 5 所示) 或者 $2r$ 。若鞍点所处的连接带是 $2r$ (如图 6 所示), 鞍点所处的区域宽度增加了一个 r , 从而与它相邻的等值线像素点会增加一个 r , 那么上面式 (8) ~ (10) 就变为

$$\nabla_j f = P(i-2n, j) + P(i+2n+1, j) - 2P(i, j) \quad (11)$$

$$\nabla_i f = P(i-n, j-n) + P(i+n+1, j+n) - P(i+n+1, j-n) - P(i-n, j+n) \quad (12)$$

$$\nabla_j f = P(i, j+2n) + P(i, j-2n) - 2P(i, j) \quad (13)$$

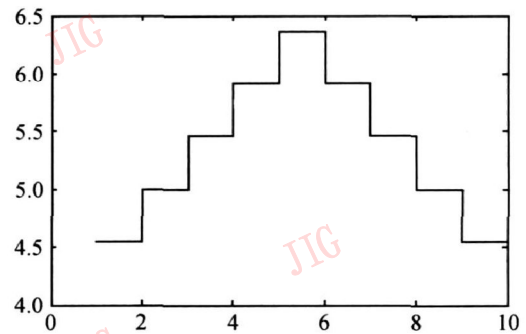


图 5 含鞍点为最高点的垂直截面内像素分布情形 (连接带宽为一个像素点)

Fig. 5 Pixel scatter in vertical cross-section including saddle point of maximal value

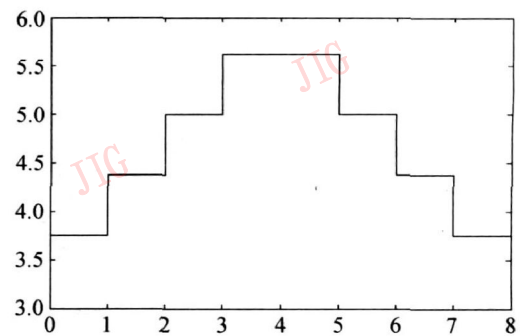


图 6 含鞍点为最高点的垂直截面内像素分布情形 (连接带宽为两个像素点)

Fig. 6 Pixel scatter in vertical cross-section including saddle point of maximal value

步长 n 的选择将会影响判断鞍点的有效性和正确性。若步长取的较短, 那么鞍点周围的像素可能非常相似或者相同, 容易使 $\nabla_i f$, $\nabla_j f$, $\nabla_i f$ 错误的满足约束条件发生误判。相反, 如果 n 取的值过大, 那么所取的值就会越过最高点, 使得判断最小值方向发生错误, 最终造成漏判。

3 实验结果

首先采用多个圆相互接触粘连的图像进行实验, 然后再采用 CCD 相机在取图暗箱里拍摄的大小为 352×288 的颗粒图像进行实验, 图像里面包含了数个相互接触或者轻粘连的岩石颗粒, 如图 7 (a), 图 8 (a) 所示。

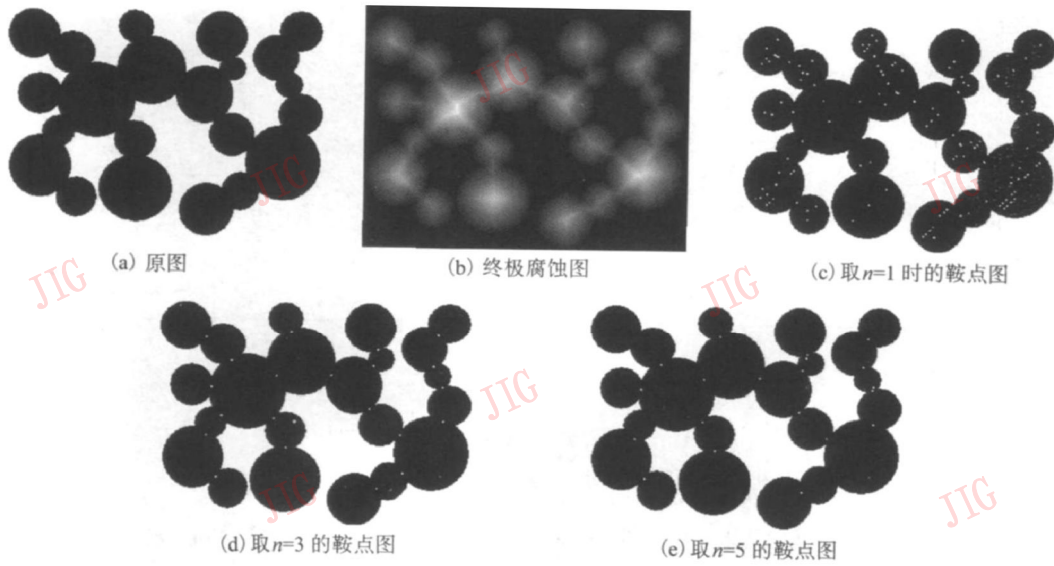


图 7 实验图片 1

Fig. 7 Test image 1

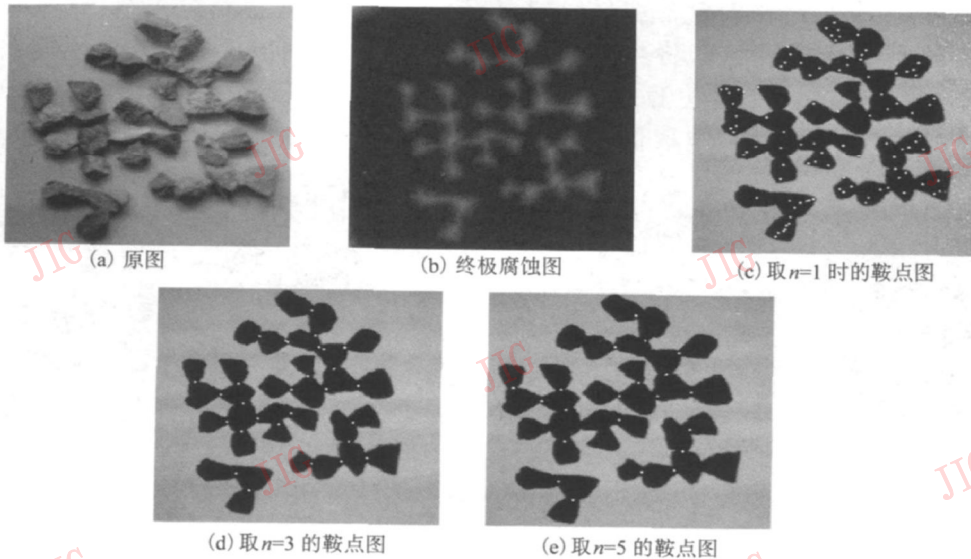


图 8 实验图片 2

Fig. 8 Test image 2

图 7(b), 图 8(b)是对图 7(a), 图 8(a)用 3×3 的结构元素进行 3 维地貌化的图像, 图 7(c) ~ 图 7(g)和图 8(c) ~ 图 8(g)是利用式 (7)的局部鞍点规划条件, 分别采用步长 $n = 1$ 至 5 时确定鞍点位置的实验结果图。

为了能够更加清楚地看到 n 取不同的数值, 得到结果的差异, 本文定义了一组参数来描述算法的精度。

误判率:

$$W = \frac{\text{伪鞍点的数目}}{\text{真实鞍点的数目} + \text{伪鞍点的数目}} \times 100\%$$

漏判率:

$$M = \frac{\text{漏判的鞍点数目}}{\text{真实鞍点的数目}} \times 100\% =$$

$$\frac{\text{真实鞍点的总数} - \text{判定出的真实鞍点的数目}}{\text{真实鞍点的总数}} \times 100\%$$

准判率:

$$C = \frac{\text{判断出真实鞍点的数目}}{\text{真实鞍点的数目}} \times 100\%$$

从图 9 中可以明显地看出, 采用 3×3 结构元素对原颗粒图像进行腐蚀, 然后用取不同的步长进行搜索鞍点, 得到的算法精度大不相同。步长为 1 搜寻到的鞍点误判率和采用其他步长的明显偏高很多, 而漏判率和准判率也逊色很多。随着步长的逐渐增大, 过判率和漏判率都逐渐减少, 当取到 $n = 3$ 时, 准判率达到最高, 过判率和漏判率最低, 效果达到最好。之后随着步长的增大, 误判率有所下降, 但

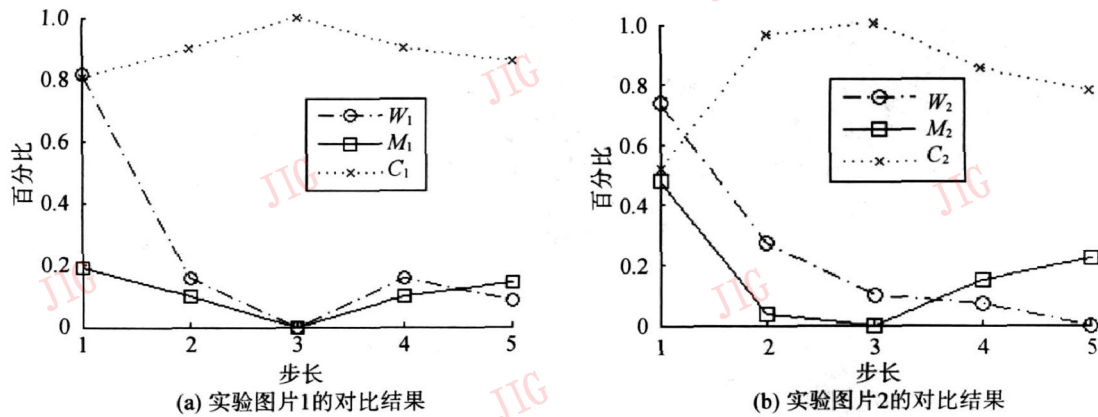


图 9 步长与鞍点判断精度的相关性

Fig. 9 Correlation between step and algorithm accuracy

准盘率不尽人意,漏判率升高,最后得到的结果差强人意。因此,在用 3×3 的结构元素对颗粒图像进行 3 维地貌化时,步长 n 取 3 时效果达到最好。本算法是用 3×3 的结构元素在给定的图像分辨率下得到的结果,步长 n 的最佳取值将会随着结构元素或者分辨率大小变化而发生变化。初步的结论为:对于给定的分辨率, n 的最佳取值将随着

结构元素的不断增大而逐渐减小;对于给定的结构元素, n 的最佳取值将随着分辨率的不断减小而渐增大。

图 10 显示了另外 4 幅颗粒图像的鞍点搜索效果图。表 1 列出了不同步长所得到的鞍点搜寻结果。从该表可以看出,当步长 n 为 3 时准判率达到最优。采用步长 $n = 3$ 。

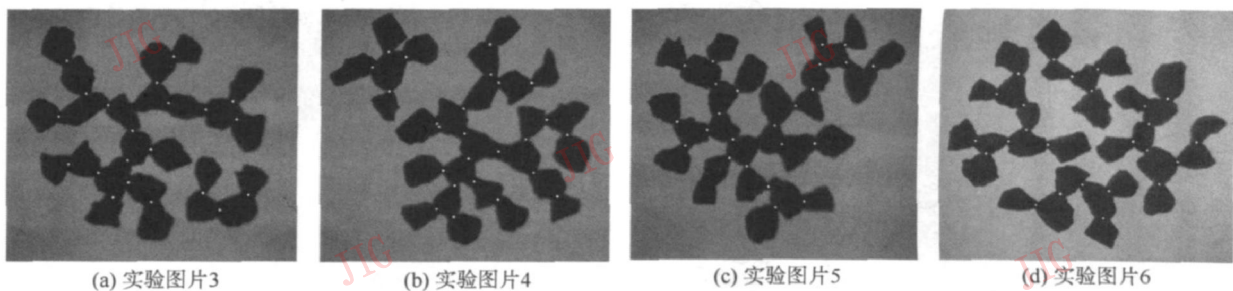


图 10 实验图片

Fig. 10 Test image

表 1 实验结果的参数对比
Tab. 1 Test result comparison

	伪鞍点的数目	检测真实鞍点的数目	漏判鞍点的数目	真实鞍点的数目	W %	M %	C %	
实验图像 1	$n = 1$	93	17	4	21	81.6	19	81
	$n = 2$	4	19	2	21	16	10	90
	$n = 3$	0	21	0	21	0	0	100
	$n = 4$	4	19	2	21	16	10	90
	$n = 5$	2	18	3	21	8.7	14.3	85.7
实验图像 2	$n = 1$	76	14	13	27	73.8	48.1	51.9
	$n = 2$	10	26	1	27	27	3.7	96.3
	$n = 3$	3	27	0	27	10	0	100
	$n = 4$	2	23	4	27	6.9	14.8	85.2
	$n = 5$	0	23	6	27	0	22	78

文献 [5] 提出了一种基于 Hessian 矩阵的鞍点搜寻算法并取得了令人满意的结果。以准判率作为衡量标准, 将本文提出的算法与文献 [5] 算法作比

较可知, 本文算法在鞍点检测的精度上有一定程度的改善, 比较结果如表 2 所示。

表 2 实验结果的参数对比
Tab. 2 Test result comparison

算法	准判率					
	图片 1	图片 2	图片 3	图片 4	图片 5	图片 6
本文算法	100%	100%	100%	100%	96%	100%
文献 [5] 的算法	95.2%	92.6%	95.8%	95.2%	96%	96%

4 结 论

在对粘连颗粒图像进行分割的方法中, 鞍点可被用来确定分割线中心位置。本文提出一种在颗粒图像上搜寻鞍点的新算法。算法主要通过用 3×3 结构元素对图像 3 维地貌化后构成的鞍面上对其施加局部鞍点规划的条件来确定鞍点及其位置。本文采用不同的步长对算法进行实验, 最后实验证明, 当步长取 3 时效果较好, 得到的效果令人满意。本文利用数学规划条件来搜寻鞍点的方法能在大多数颗粒图像上确定了鞍点的位置, 改善了判断鞍点的准确率, 为接下来的研究工作提供了一些方便。

参考文献 (References)

- [1] Frank Fueten, Jeffrey Mason. An artificial neural net assisted approach to editing edges in petrographic image collected with the rotating polarizer stage [J]. Computers & Geosciences, 2007, 33(3): 1176-1188.
- [2] You Yusai, Yu Huimin, Liu Yuanyuan. Separating algorithm for overlapping circular granule images based on granulometry [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2005, 39(7): 962-966. [尤育赛, 于慧敏, 刘圆圆. 基于颗粒测量的重叠圆形颗粒图像分离方法 [J]. 浙江大学学报 (工学版), 2005, 39(7): 962-966.]
- [3] Vincent Tarlet, Dominique Jeulin, Alain Fangeat, et al. 3D multi-scale segmentation of granular materials [J]. Image Anal Stereo, 2008, 27(5): 23-28.
- [4] Chen Ken. Saddle-point based separation of touched objects in 2-D image [J]. Journal of Electronics, 2006, 23(3): 452-456.
- [5] Chen Ken, Wang Yicong, Yang Renen. Hessian matrix based saddle point detection for granules segmentation in 2D image [J]. 2008, 25(6): 728-736.
- [6] Kostas Zotos. Object-oriented programming in mathematics [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188(20): 1562-1566.
- [7] Wu Zhiyao, Zhang Liangsheng. The global optimization for some classes of programming problem [J]. OR Transactions, 2003, 7(2): 9-20.
- [8] Lin Yiqin, Wei Yin. A convergence analysis of the nonlinear Uzawa algorithm for saddle point problems [J]. Applied Mathematics Letters, 2007, 20(4): 1094-1098.
- [9] Mahata K, Kailas S, Kapoor S S. Fission barriers and shell corrections at the saddle point for mass ~ 200 [J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2007, 59(16): 305-307.
- [10] Olsen R A, Kroes G J. Comparison of methods for finding saddle points without knowledge of the final states [J]. Journal of Chemical Physics, 2004, 121(2): 9776-9792.
- [11] Aleksandra Kelić, Karl-Heinz Schmidt. Assessment of saddle-point mass predictions for astrophysical applications [J]. Physics Letters B, 2006, 634(5): 362-367.
- [12] Kuijper A. On detecting all saddle points in 2D images [J]. Pattern Recognition Letters, 2004, 25(9): 1665-1667.